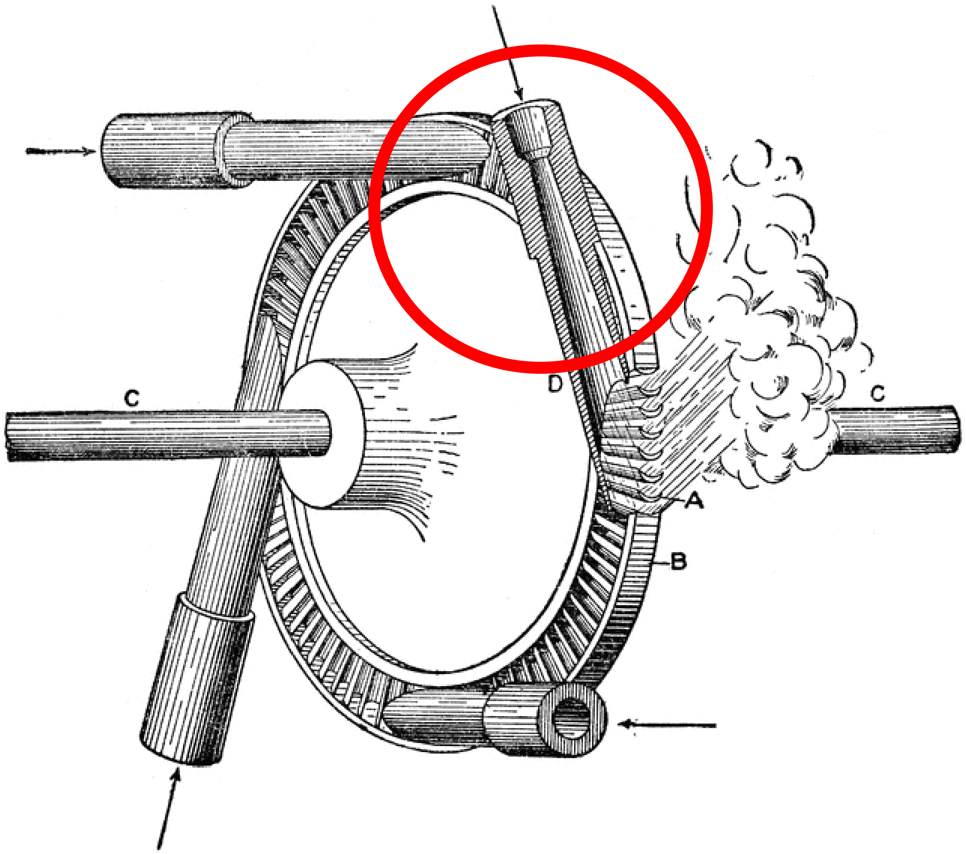
# Mécanique des Fluides Compressibles
## Ecoulement quasi-monodimensionnel isentropiques permanents

**Dr Flavio NOCA**

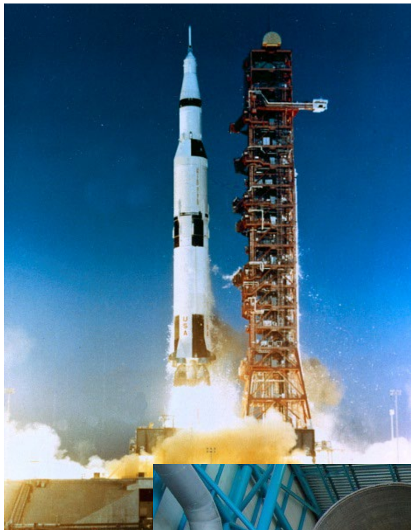
Semestre printemps 2024-2025

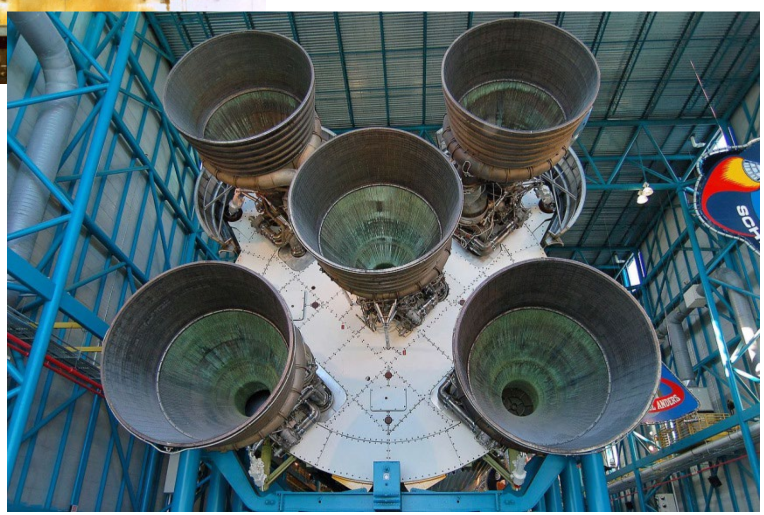
# Gustaf De Laval (1890)

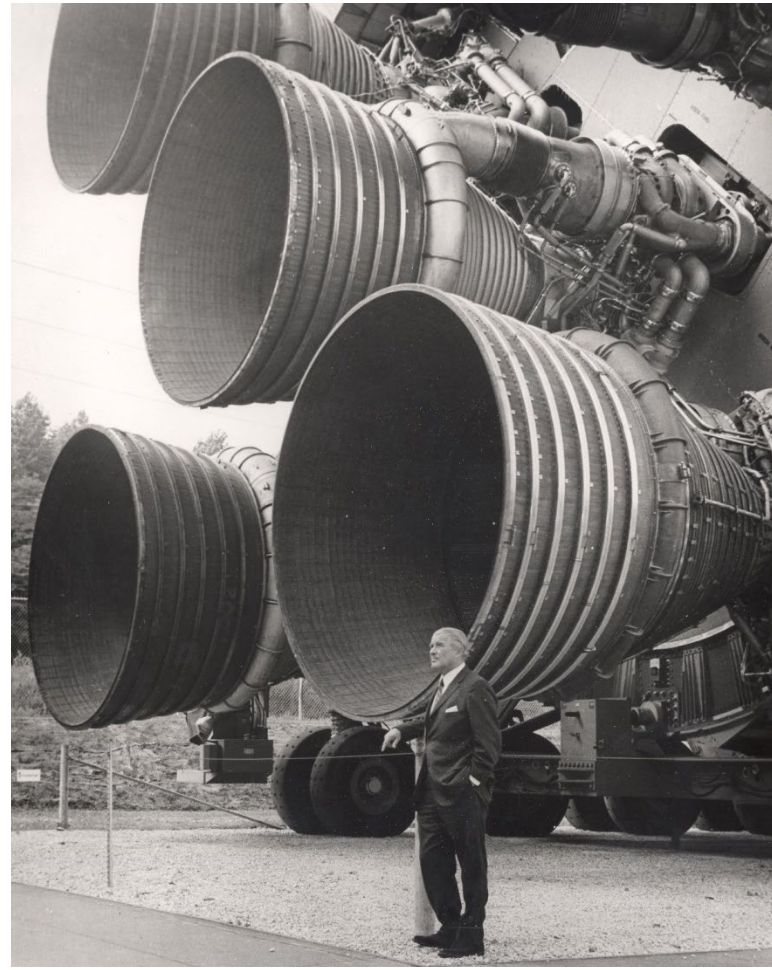


# Tuyère à section variable

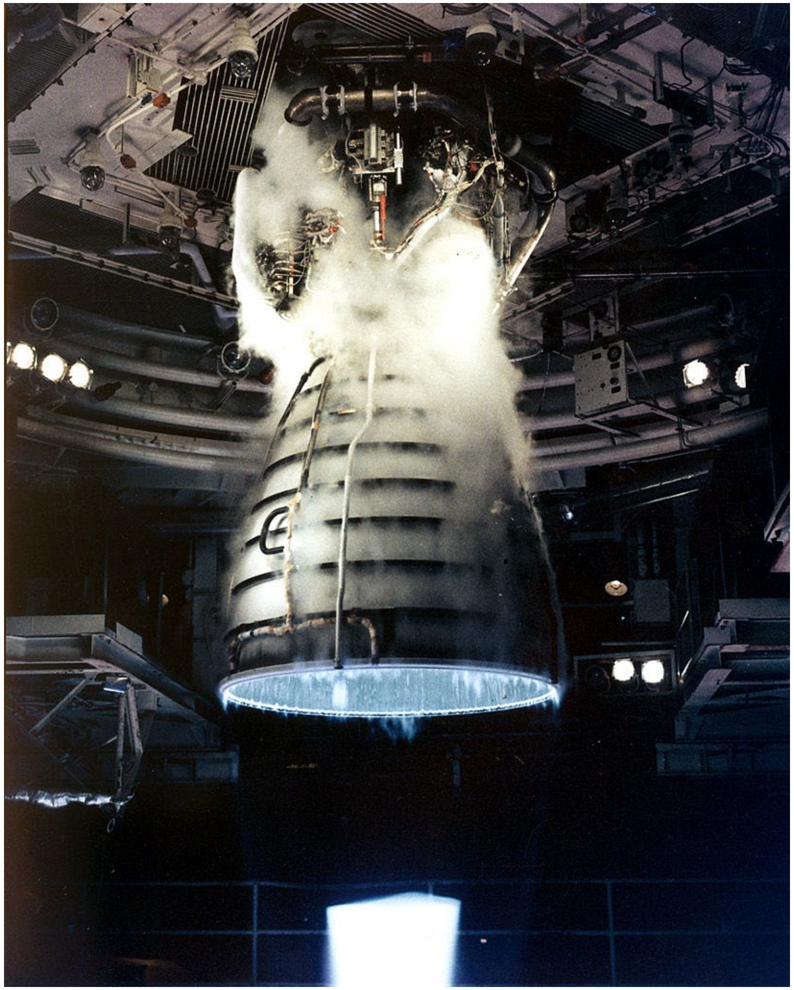

# Tuyère à section variable







# Tuyère à section variable



# Tuyère à géométrie variable

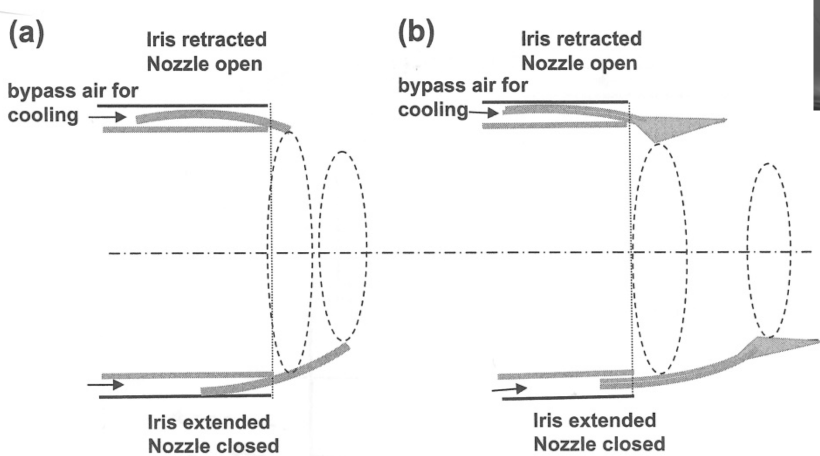
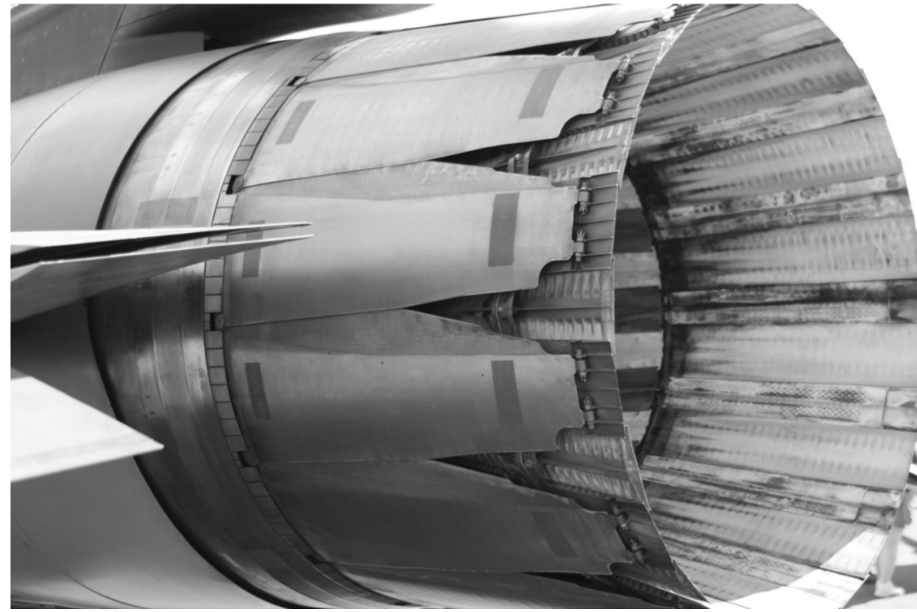




**FIGURE 5.19**

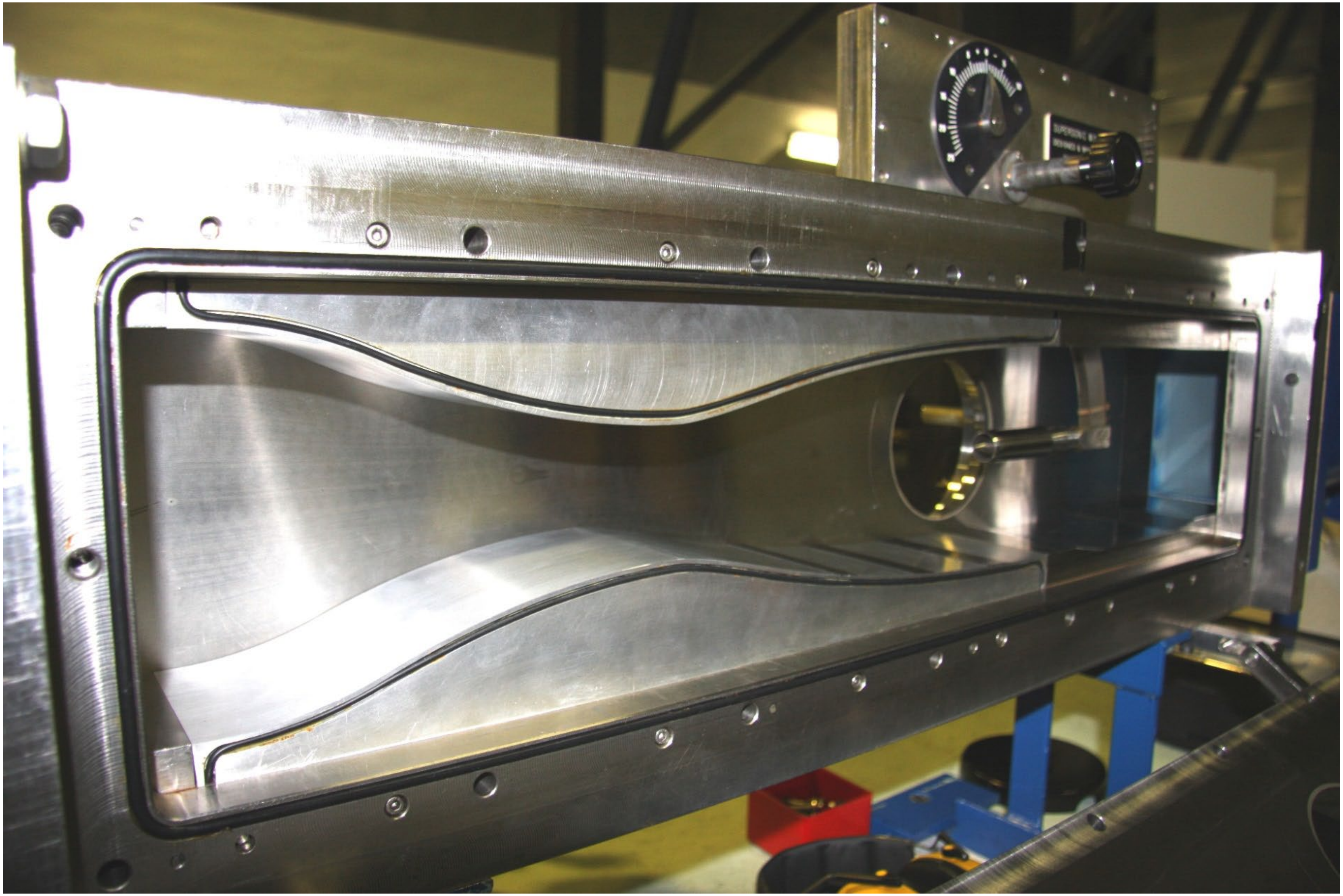
Iris-type variable area nozzles: (a) convergent and (b) convergent–divergent. The upper half of the diagrams represents the high throat and/or exit area setting, while the lower half depicts the smaller throat and/or exit area setting.



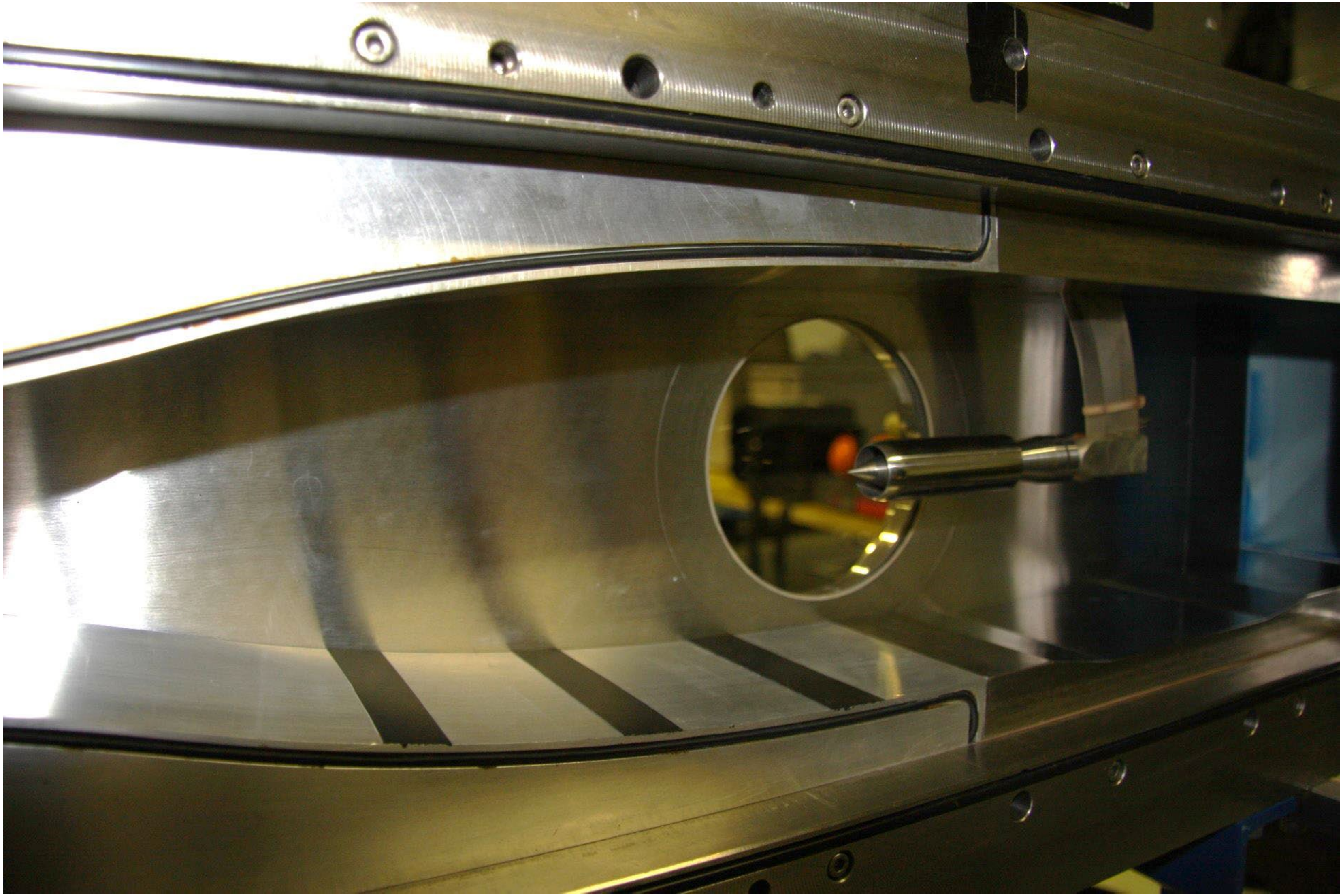
GE F110
(F-16, F-15)

# Tuyère à géométrie variable

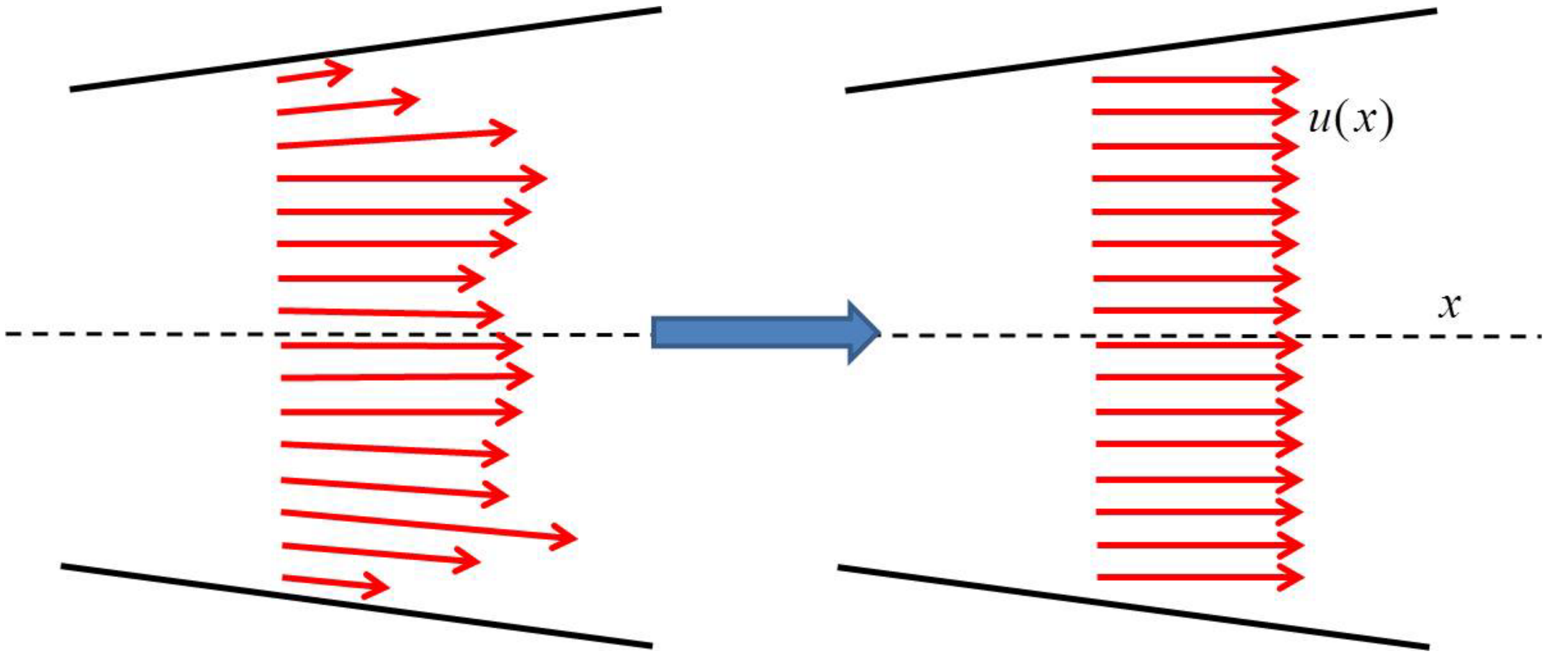
# Tuyère à section variable



# Tuyère à section variable



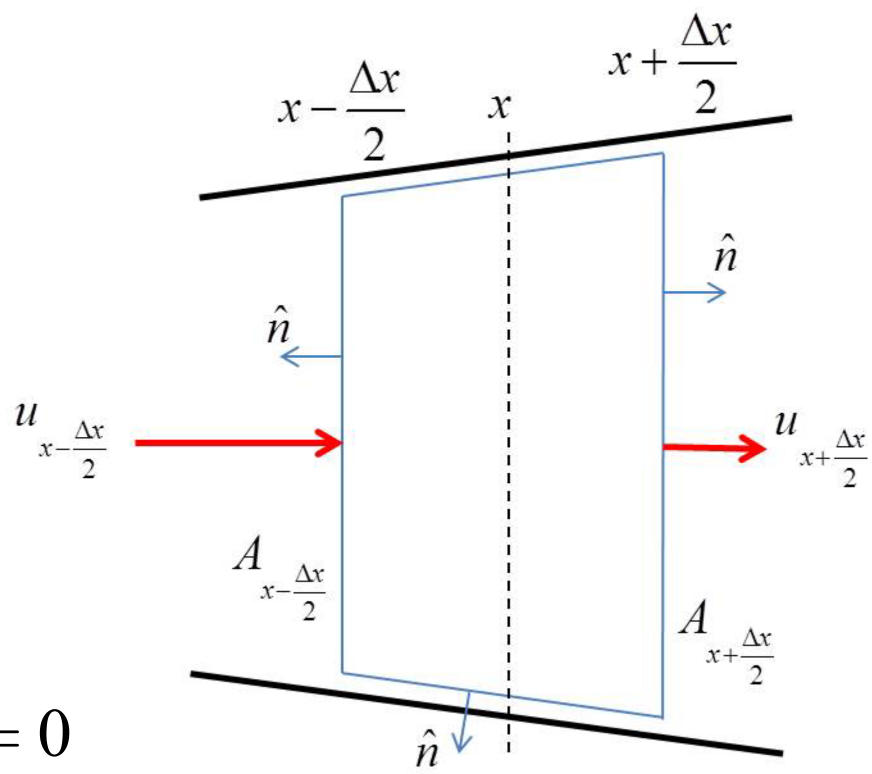
# Ecoulement quasi mono-dimensionnel



# Conservation de masse

- Formulation intégrale

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV}_{\text{variation temporelle de } \rho \text{ à l'intérieur de V}} + \overbrace{\int_S \rho \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dS}^{\text{débit de } \rho \text{ à travers S}} = 0$$




- Hypothèses:
  - Permanent: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
  - Quasi mono-dimensionnel: $u(x)$

$$(\rho u A)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - (\rho u A)_{x-\frac{\Delta x}{2}} = 0$$

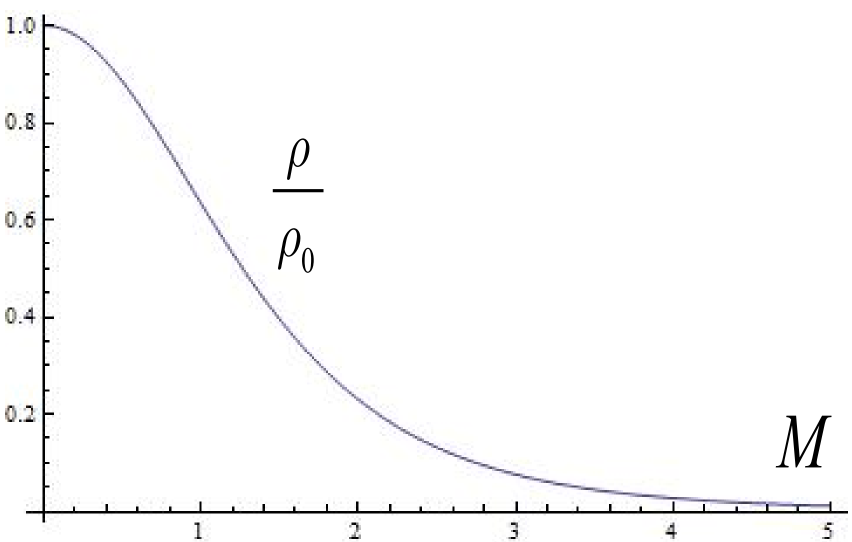
- Divise par $\Delta x$ avec $\Delta x \to 0$

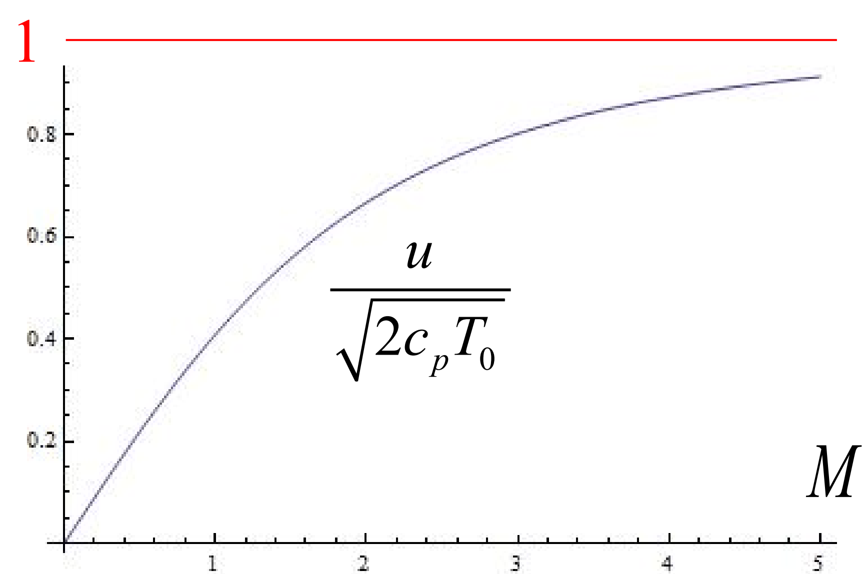
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\rho u A) = 0}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

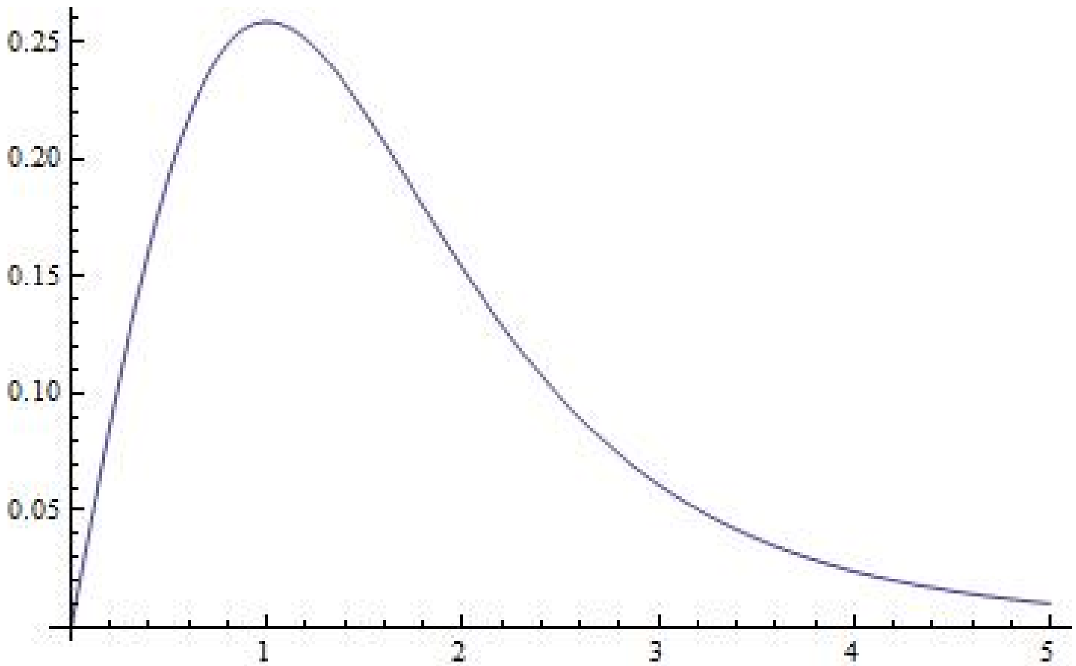
$$\frac{u}{\sqrt{2c_pT_0}} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\frac{M}{\sqrt{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}}$$



# Débit par unité de surface

$$\frac{\rho u}{\rho_0\sqrt{2c_pT_0}}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\frac{M}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$




$M$

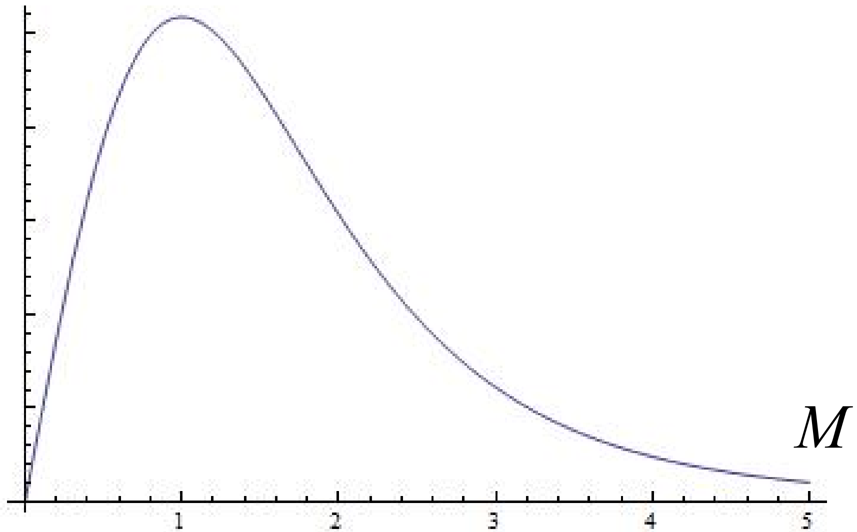
# Conservation de masse

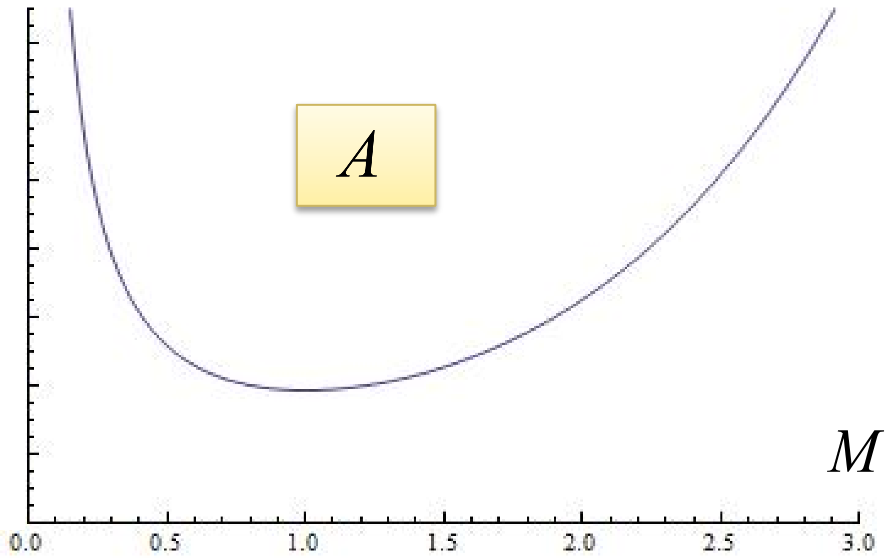
- Conservation de masse

$$\rho u A = const$$

- Débit surfacique:

$$\rho u$$



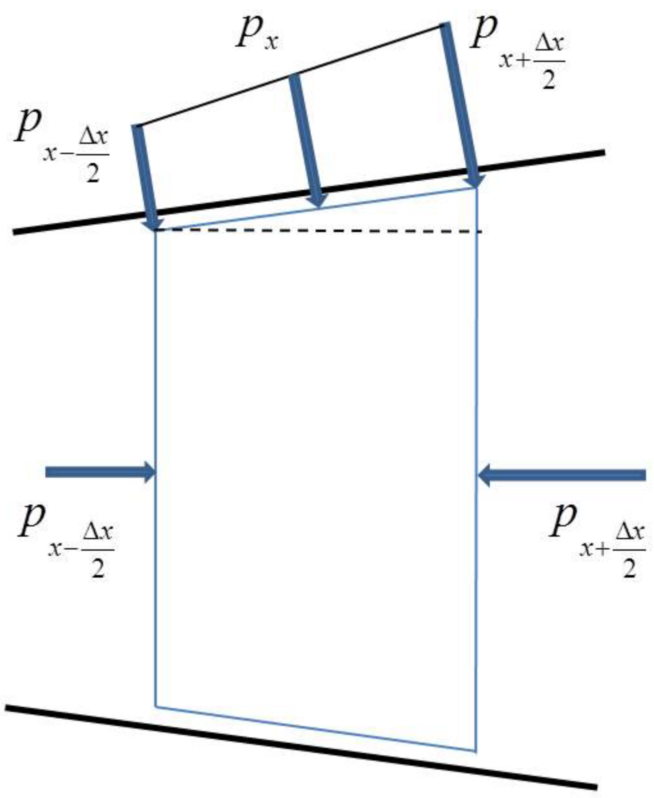




**Une tuyère convergente-divergente est nécessaire pour passer d'un régime subsonique à un régime supersonique**

# Conservation de quantité de mouvement

- Formulation intégrale

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\mathbf{u}\, dV}_{\text{variation temporelle de } \rho\mathbf{u} \text{ à l'intérieur de V}} + \overbrace{\int_S \rho\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{u}\mathbf{u})\, dS}^{\text{flux de } \rho\mathbf{u} \text{ à travers S}} = \overbrace{\int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot\Sigma\, dS + \int_V \rho\mathbf{f}\, dV}^{\text{somme des forces surfaciques et volumiques}}$$




- Hypothèses:
  - Permanent: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
  - Quasi mono-dimensionnel: $u(x)$
  - Sans viscosité, sans forces volumiques

$$\Sigma = -p\mathbf{I} \qquad \mathbf{f} = 0$$

# Conservation de quantité de mouvement

- Formulation intégrale selon x $\left[\int_S \rho(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{u}\, dS = -\int_S p\hat{\mathbf{n}}\, dS\right]_x$

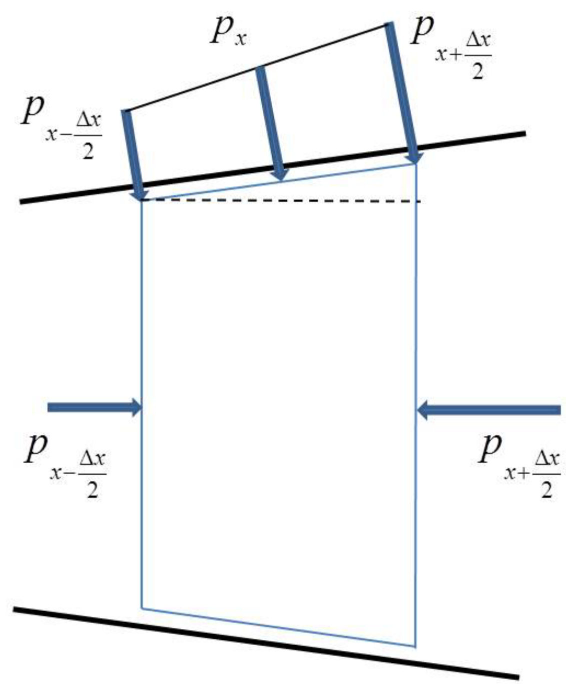
$$\left(\rho u^2 A\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(\rho u^2 A\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}} = -(pA)_{x+\frac{\Delta x}{2}} + (pA)_{x-\frac{\Delta x}{2}} + p_x\left(A_{x+\frac{\Delta x}{2}} - A_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

- Divise par $\Delta x$ avec $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\rho u^2 A\right) = -\frac{d}{dx}\left(pA\right) + p\frac{d}{dx}\left(A\right)$$

- Avec conservation de la masse

$$\boxed{\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}}$$



➢ Les variables de l'écoulement ne dépendent que de x. Les équations de conservation s'écrivent donc:

**Conservation de la masse**

$$d\left(\rho u A\right) = 0 \qquad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{d(\rho u A)}{dx} = 0$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = const$$

**Conservation de la quantité de mouvement**

$$\rho u du = -dp$$

**Conservation de l'énergie**

**Redondante et identique à la relation précédente pour un écoulement isentropique car:**

$$dh + u du = 0 \qquad dh = \frac{1}{\rho} dp$$

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

# Effets de la variation de section

- Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement sous la forme,

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -udu$$

- L'écoulement est isentropique, on obtient ainsi

$$\frac{dp}{\rho} = a^2\frac{d\rho}{\rho} = -udu$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{udu}{a^2} = -\frac{u^2 du}{a^2 u} = -M^2\frac{du}{u}$$

- En introduisant cette relation dans la conservation de la masse

$$\boxed{\frac{dA}{A} = (M^2 - 1)\frac{du}{u}}$$

$$\rho u du = -dp$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^2$$

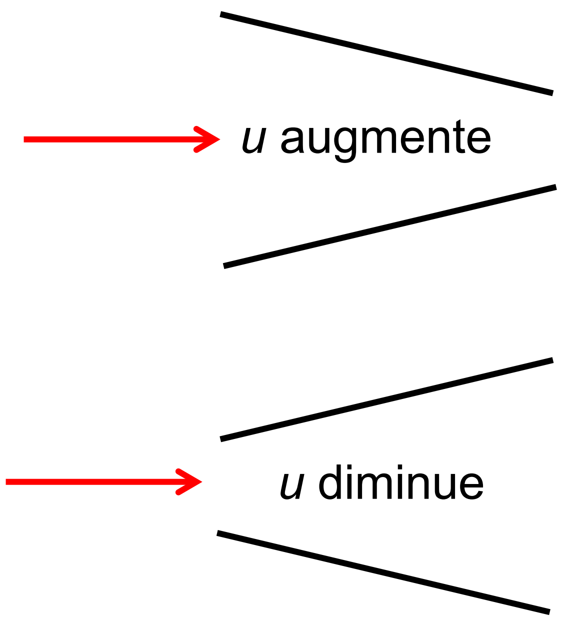
$$M = \frac{u}{a}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

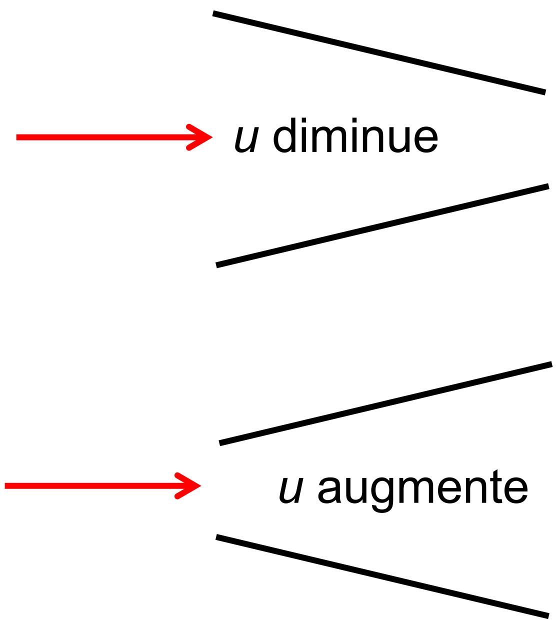
### Interprétation

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1)\frac{du}{u}$$

$$M < 1$$




$$M > 1$$



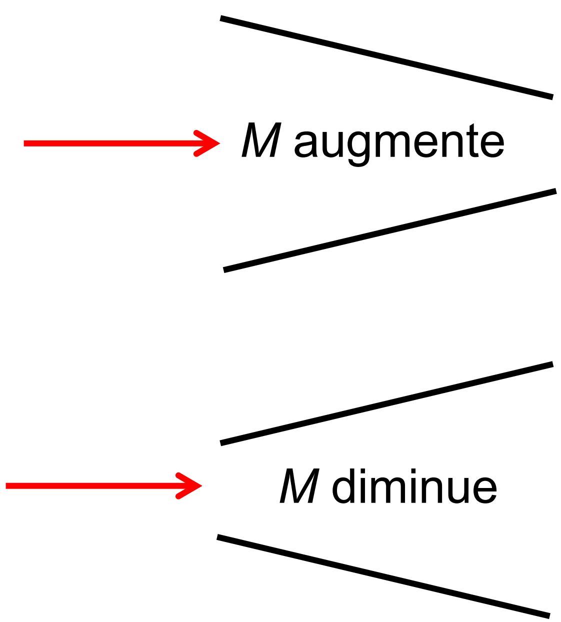
# Effets de la variation de section

**Chapitre précédent**

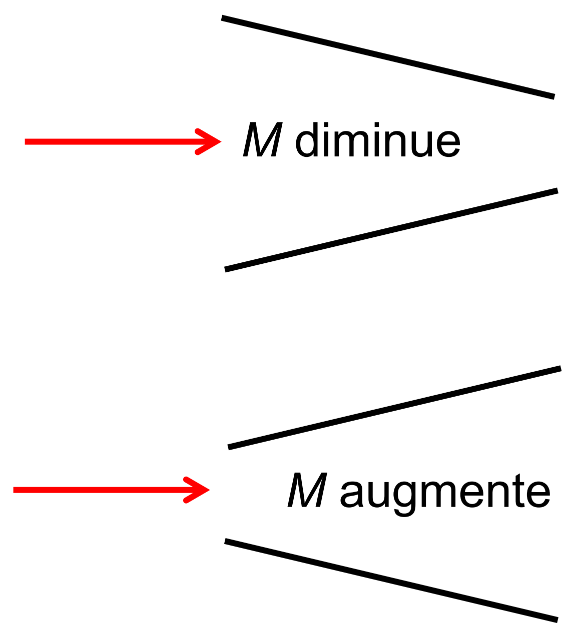
$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

$$\frac{dA}{A} = (M^2-1)\frac{du}{u}$$

$$M < 1$$




$$M > 1$$



- On peut obtenir les relations suivantes

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1)\frac{du}{u}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

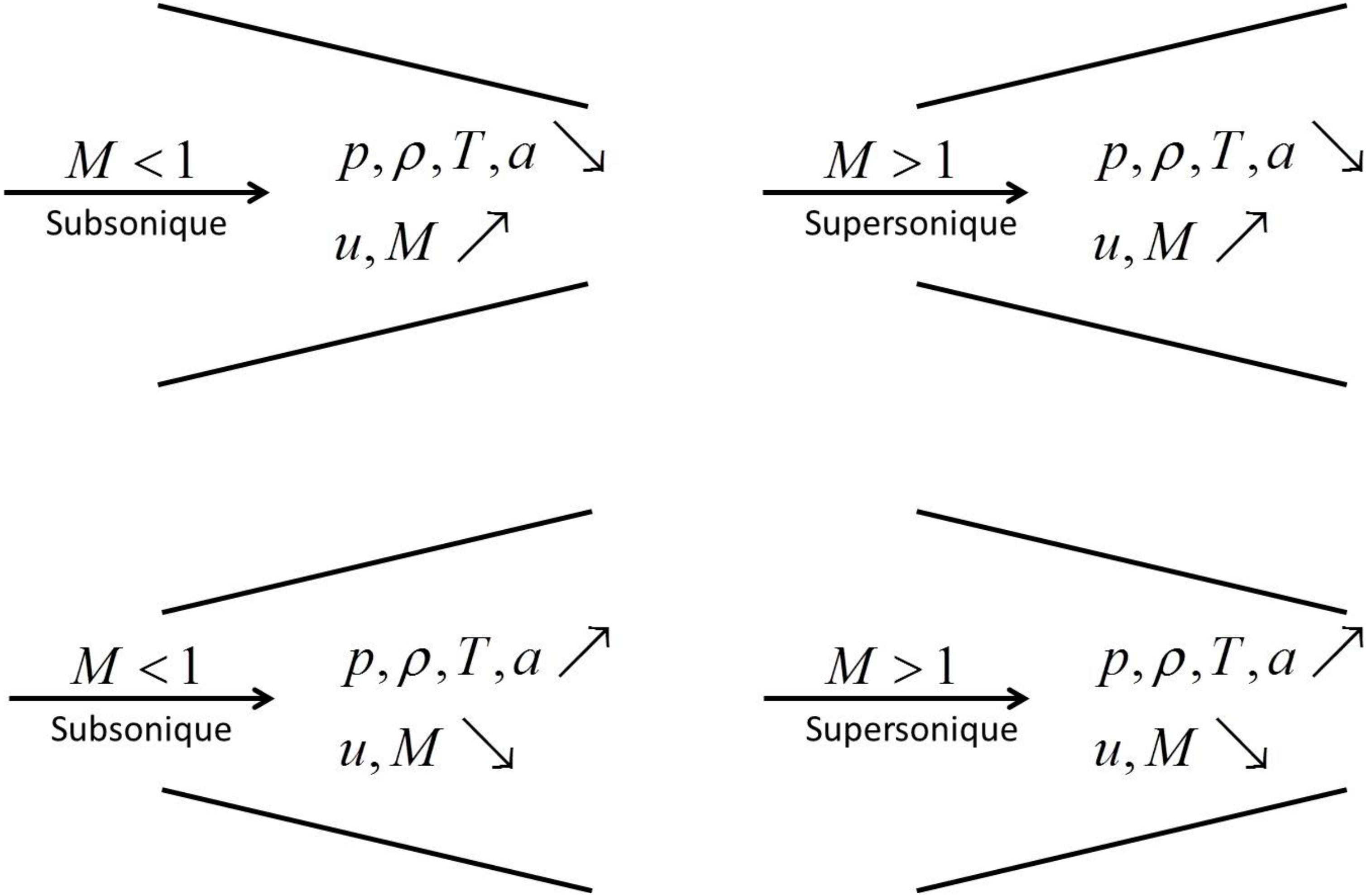
$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{\left(M^2 - 1\right)}{\gamma M^2} \frac{dp}{p}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $dA/A$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $M$ | $< 1$ | $> 1$ | $< 1$ | $> 1$ |
| $du/u$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $dM/M$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $dp/p$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $d\rho/\rho$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $dT/T$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $da/a$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

# Effets de la variation de section



# Conditions au col

- Passage de manière continue du régime subsonique au régime supersonique

- Il existe un point (une section) telle que $M = 1$

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1)\frac{du}{u} \xrightarrow{M=1} dA = 0$$

**Le passage du régime subsonique au régime supersonique s'effectue sur un extrémum de la section**

**Minimum ou maximum?**

# Conditions au col

- On considère la relation ci-contre sous la forme

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dx}=\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{A}\right]\frac{1}{M^2-1}\frac{dA}{dx}$$

$$\frac{du}{u}=\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

$$\frac{dA}{A}=(M^2-1)\frac{du}{u}$$

$$\frac{dA}{A}=\frac{M^2-1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

- Lorsque $M$ tend vers 1 et $dA/dx$ tend vers 0, on peut appliquer la règle de l'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{M\to 1,\frac{dA}{dx}\to 0}\frac{1}{M}\frac{dM}{dx}=\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{A}\right]_{M=1}\frac{\frac{d^2A}{dx^2}}{2M\frac{dM}{dx}}$$

$$\lim_{M\to 1,\frac{dA}{dx}\to 0}\left(\frac{dM}{dx}\right)^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{A}\right]_{M=1}\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{(1+\gamma)}{4A}\frac{d^2A}{dx^2}$$

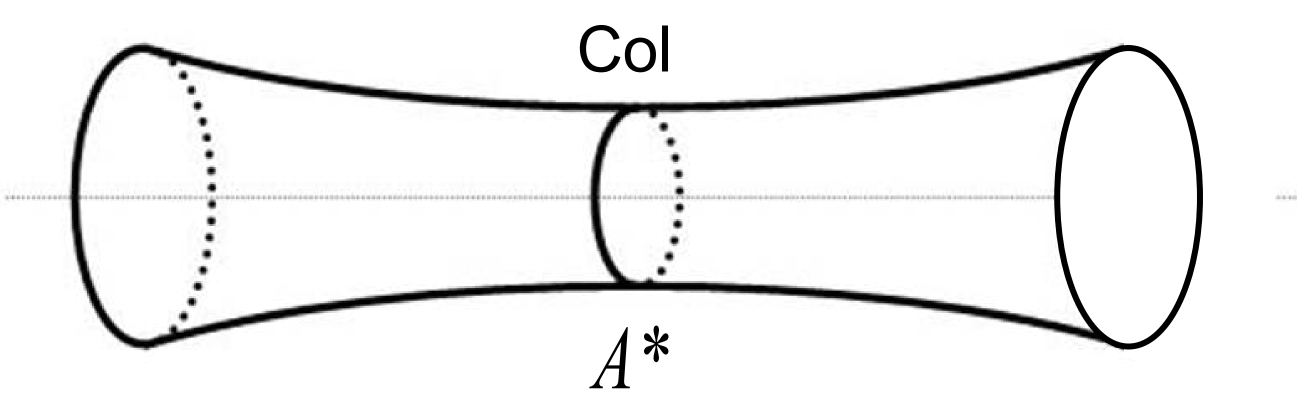
- On obtient donc

$$\lim_{M\to 1,\frac{dA}{dx}\to 0}\left(\frac{dM}{dx}\right)^2=\frac{(1+\gamma)}{4A}\frac{d^2A}{dx^2}$$

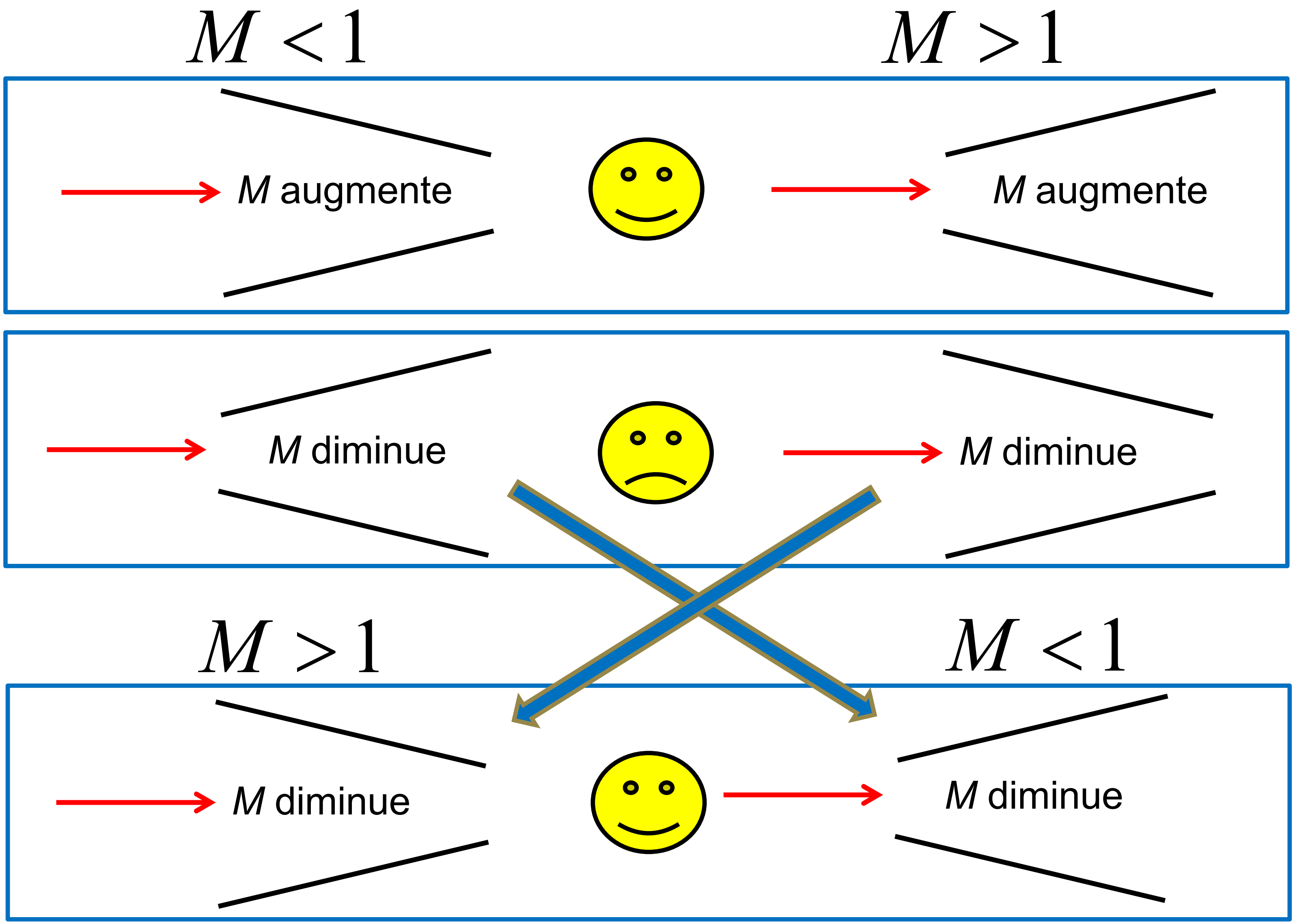
- Le membre de droite doit être positif, ce qui implique $\dfrac{d^2A}{dx^2}\geq 0$

**Le passage du régime subsonique au régime supersonique s'effectue au col de la tuyère (minimum)**

$$M=1$$



# Effets de la variation de section



# Relation entre une section et la section au col

- **Au col**, M=1 (conditions soniques)

$$\rho_*, u_*, A_*$$

- **Reste de la tuyère**, M≠1

$$\rho, u, A$$

$$u = u_* = a_*$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

- Conservation de la masse

$$\rho_* u_* A_* = \rho u A$$

- Ce qui peut s'écrire:

$$\frac{A}{A_*} = \frac{\rho_* a_*}{\rho u} = \frac{\rho_* \rho_0 a_*}{\rho_0 \rho u}$$

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{\rho_* a_*}{\rho u}\right)^2 = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \left(\frac{a_*}{u}\right)^2$$

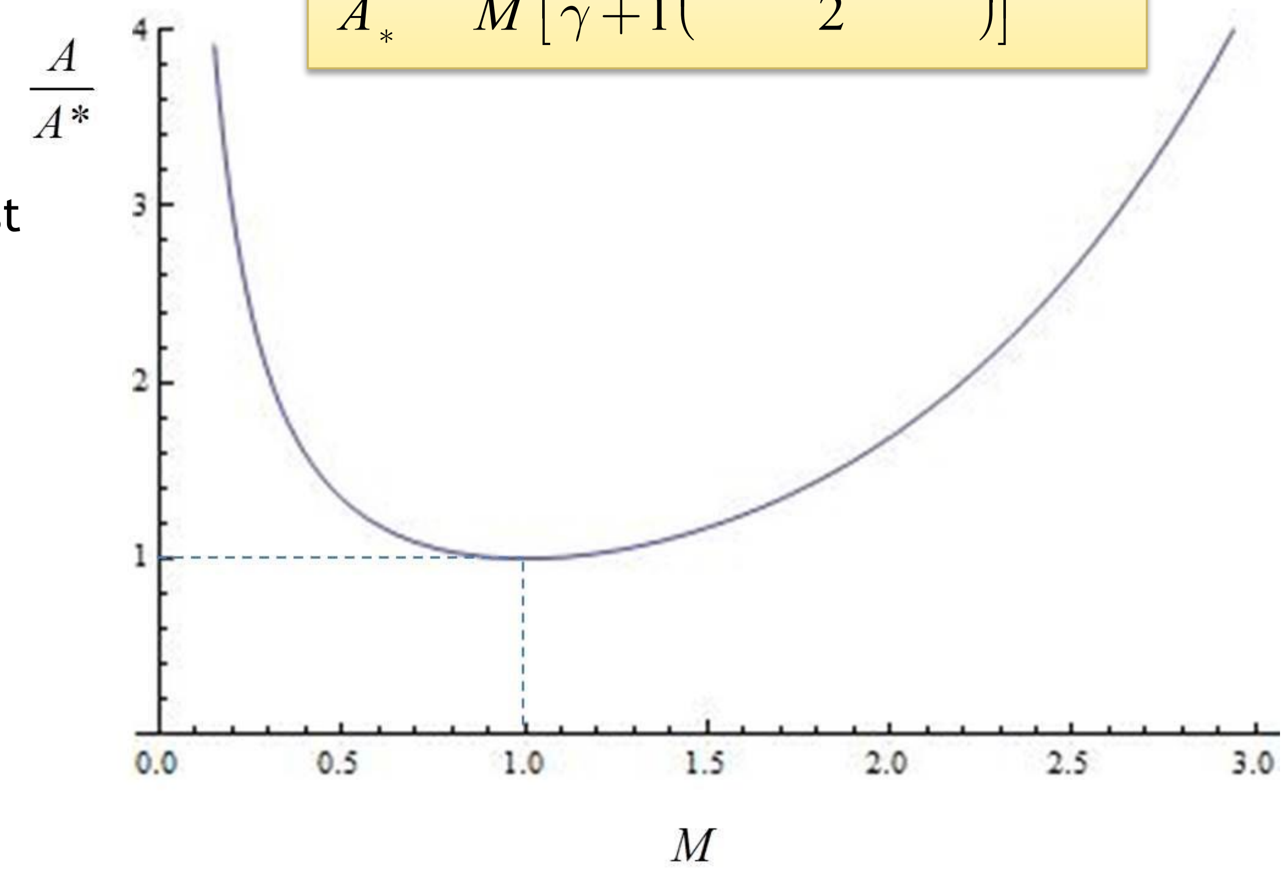
- On remplace avec les relations isentropiques

$$M_*^2 = \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}$$

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{2}{\gamma - 1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{2}{\gamma - 1}} \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{(\gamma + 1) M^2}\right)$$

- La relation précédente se simplifie

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$




- Le nombre de mach M n'est fonction que de $A/A_*$

- Deux valeurs de M pour un rapport de section donné

$$\frac{A_*}{A} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]}$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$A/A_*=1$ si $p=p_*$ , ce qui correspond à $M=1$

| $\gamma$ | Monoatomique $5/3 = 1.667$ | Diatomique $7/5 = 1.4$ | $9/7 = 1.286$ |
|---|---|---|---|
| $T_*/T_0$ | 0.7499 | 0.8333 | 0.8750 |
| $p_*/p_0$ | 0.4871 | 0.5283 | 0.5483 |
| $\rho_*/\rho_0$ | 0.6495 | 0.6339 | 0.6267 |

# Débit-masse

- Le débit masse dans le tube s'écrit

$$\dot{m} = \rho u A \qquad \dot{m} = \frac{\rho u}{\rho_0 a} a \rho_0 A = \frac{\rho u}{\rho_0 a}\sqrt{\gamma r T}\,\rho_0 A$$

- Par définition du nombre de Mach, l'équation d'état et la vitesse du son

$$\dot{m} = \frac{\rho}{\rho_0} M \sqrt{\gamma r T_0 \frac{T}{T_0}}\frac{p_0}{r T_0} A = \gamma M \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{\frac{T}{T_0}}\sqrt{\frac{1}{\gamma r T_0}}\, p_0 A$$

- En utilisant encore la vitesse du son

$$\dot{m} = \gamma M \frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{\frac{T}{T_0}}\frac{p_0}{a_0} A$$

- Puis avec les relations isentropiques

$$\dot{m} = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{\gamma - 1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{2}} \frac{p_0}{a_0} A$$

$$a^2 = \gamma r T$$

$$M = \frac{u}{a}$$

$$p = \rho r T$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\dot{m} = \gamma M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{-1}{2}}\frac{p_0}{a_0}A$$

- La relation précédente se simplifie

$$\boxed{\dot{m} = \gamma M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\frac{p_0}{a_0}A}$$

- On utilise aussi la forme sans dimension

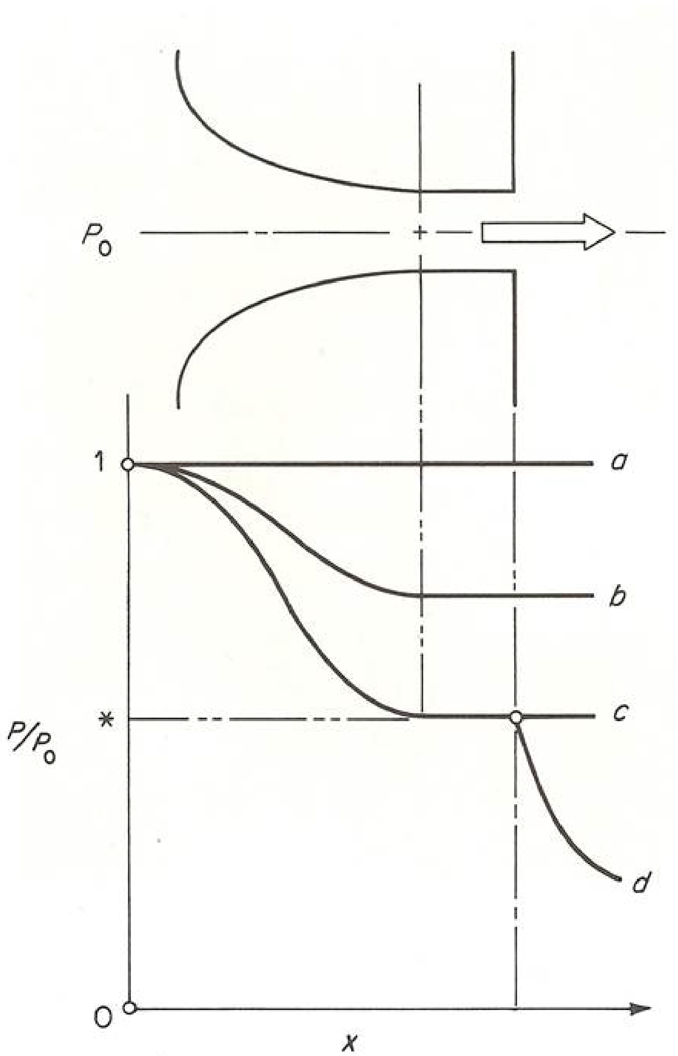
$$\boxed{\frac{a_0\dot{m}}{p_0 A} = \gamma M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

- Avec la référence aux conditions soniques, M=1

$$\frac{a_0\dot{m}}{p_0 A_*} = \gamma\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{m}}{\rho_0 a_0 A_*} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

# Tuyère CONVERGENTE



# Tuyère CONVERGENTE - DIVERGENTE